Combinatoria I

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Estructuras Discretas CCOS 009

Contenido

Motivación

- Suponga que una contraseña en un sistema de computadora consta de seis, siete u ocho caracteres.

Motivación

- Cada uno de estos caracteres debe ser un dígito o una letra del alfabeto.

Motivación

- Cada contraseña debe contener al menos un dígito.

Motivación

- ¿Cuántas contraseñas de este tipo existen?

- En esta sección se presentarán las técnicas necesarias para responder esta pregunta y una amplia variedad de otros problemas de conteo.

Motivación

- Los problemas de conteo surgen a lo largo de las matemáticas y las ciencias de la computación.

Motivación

- Por ejemplo, debemos contar los resultados exitosos de los experimentos y todos los resultados posibles de estos experimentos para determinar las probabilidades de eventos discretos.

Motivación

- Necesitamos contar el número de operaciones utilizadas por un algoritmo para estudiar su complejidad en tiempo.

- Primero presentamos dos principios básicos de conteo, la **regla del producto** y la **regla de la suma**.

- Luego, mostraremos cómo se pueden usar para resolver muchos problemas de conteo diferentes.

Principios Básicos de Conteo I

- La regla del producto se aplica cuando un procedimiento se compone de tareas separadas.

Regla del Producto

LA REGLA DEL PRODUCTO Suponga que un procedimiento se puede dividir en una secuencia de dos tareas. Si hay n_1 formas de realizar la primera tarea y para cada una de estas formas de realizar la primera tarea, hay n_2 formas de realizar la segunda tarea, entonces hay $n_1 n_2$ formas de realizar el procedimiento.

Ejemplo 1

Hay 32 computadoras en un centro de datos en la nube. Cada una de estas computadoras tiene 24 puertos. ¿Cuántos puertos de computadora diferentes hay en este centro de datos?

Ejemplo 1

Ejemplo 1

Hay 32 computadoras en un centro de datos en la nube. Cada una de estas computadoras tiene 24 puertos. ¿Cuántos puertos de computadora diferentes hay en este centro de datos?

Solución:

- El procedimiento para elegir un puerto consta de dos tareas, primero elegir una computadora y luego elegir un puerto en esta computadora.

Ejemplo 1

Ejemplo 1

Hay 32 computadoras en un centro de datos en la nube. Cada una de estas computadoras tiene 24 puertos. ¿Cuántos puertos de computadora diferentes hay en este centro de datos?

Solución:

- Debido a que hay 32 formas de elegir la computadora y 24 formas de elegir el puerto sin importar qué computadora se haya seleccionado, la regla del producto muestra que hay $32 \cdot 24 = 768$ puertos.

$\square$

Ejemplo 2

Ejemplo 2

¿Cuántas placas de matrícula diferentes se pueden hacer si cada placa contiene una secuencia de tres letras en inglés mayúsculas seguidas de tres dígitos (y no se prohíbe ninguna secuencia de letras, incluso si son obscenas)?

Ejemplo 2

¿Cuántas placas de matrícula diferentes se pueden hacer si cada placa contiene una secuencia de tres letras en inglés mayúsculas seguidas de tres dígitos (y no se prohíbe ninguna secuencia de letras, incluso si son obscenas)?

Solución:

- Hay 26 opciones para cada una de las tres letras mayúsculas en inglés y 10 opciones para cada uno de los tres dígitos.

Ejemplo 2

Ejemplo 2

¿Cuántas placas de matrícula diferentes se pueden hacer si cada placa contiene una secuencia de tres letras en inglés mayúsculas seguidas de tres dígitos (y no se prohíbe ninguna secuencia de letras, incluso si son obscenas)?

Solución:

- Por lo tanto, según el producto, hay un total de $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17,576,000$ posibles placas de matrícula.

$\square$

Ejemplo 3 I

Ejemplo 3

¿Cuál es el valor de k después de que se haya ejecutado el código de la Figura 1, donde $n_1, n_2, \ldots, n_m$ son números enteros positivos?

$$
\begin{array}{l}
k := 0 \\
\textbf{for } i_1 := 1 \textbf{ to } n_1 \\
\quad \textbf{for } i_2 := 1 \textbf{ to } n_2 \\
\qquad\quad \vdots \\
\qquad \textbf{for } i_m := 1 \textbf{ to } n_m \\
\qquad\quad k := k + 1
\end{array}
$$

Figura 1: Código para el Ejemplo 3.

Ejemplo 3 II

Solución:

- El valor inicial de k es cero.

Ejemplo 3 II

Solución:

- Cada vez que se atraviesa el bucle anidado, se agrega 1 a k.

Ejemplo 3 II

Solución:

- Sea T_i la tarea de atravesar el $i-$ésimo bucle.

Ejemplo 3 II

Solución:

- Entonces, el número de veces que se atraviesa el bucle es el número de formas de realizar las tareas $T_1, T_2, \ldots, T_m$.

Ejemplo 3 II

Solución:

- El número de formas de realizar la tarea $T_j, j = 1, 2, \ldots, m$, es n_j, porque el $j-$ésimo bucle se recorre una vez por cada entero i_j con $1 \leq i_j \leq n_j$.

Ejemplo 3 II

Solución:

- Por la regla del producto, se deduce que el bucle anidado se atraviesa $n_1 n_2 \cdots n_m$ veces.

Ejemplo 3 II

Solución:

- Por tanto, el valor final de k es $n_1 n_2 \cdots n_m$.

$\square$

Regla de la Suma I

LA REGLA DE LA SUMA Si una tarea se puede realizar de una de n_1 formas o de una de n_2 formas, donde ninguna del conjunto de n_1 formas es igual que ninguna del conjunto de n_2 formas, entonces hay $n_1 + n_2$ formas de realizar la tarea.

Ejemplo 4

Suponga que se elige a un miembro de la facultad de matemáticas o un estudiante que se especializa en matemáticas como representante de un comité universitario. ¿Cuántas opciones diferentes hay para este representante si hay 37 miembros de la facultad de matemáticas y 83 especialistas en matemáticas y nadie es a la vez miembro de la facultad y estudiante?

Ejemplo 4

Suponga que se elige a un miembro de la facultad de matemáticas o un estudiante que se especializa en matemáticas como representante de un comité universitario. ¿Cuántas opciones diferentes hay para este representante si hay 37 miembros de la facultad de matemáticas y 83 especialistas en matemáticas y nadie es a la vez miembro de la facultad y estudiante?

Solución:

- Hay 37 formas de elegir a un miembro de la facultad de matemáticas y 83 formas de elegir a un estudiante que se especializa en matemáticas.

Ejemplo 4

Suponga que se elige a un miembro de la facultad de matemáticas o un estudiante que se especializa en matemáticas como representante de un comité universitario. ¿Cuántas opciones diferentes hay para este representante si hay 37 miembros de la facultad de matemáticas y 83 especialistas en matemáticas y nadie es a la vez miembro de la facultad y estudiante?

Solución:

- Elegir a un miembro de la facultad de matemáticas nunca es lo mismo que elegir a un estudiante que se especializa en matemáticas porque nadie es a la vez miembro de la facultad y estudiante.

Ejemplo 4

Suponga que se elige a un miembro de la facultad de matemáticas o un estudiante que se especializa en matemáticas como representante de un comité universitario. ¿Cuántas opciones diferentes hay para este representante si hay 37 miembros de la facultad de matemáticas y 83 especialistas en matemáticas y nadie es a la vez miembro de la facultad y estudiante?

Solución:

- Por la regla de la suma se deduce que hay $37 + 83 = 120$ formas posibles de elegir este representante.

Regla de la Suma II

- Podemos extender la regla de la suma a más de dos tareas.

Regla de la Suma II

- Suponga que una tarea se puede realizar de una de n_1 formas, de una de n_2 formas, ..., o de una de n_m formas, donde ninguna de las n_i formas de realizar la tarea es igual a ninguna de las del conjunto de n_j formas, para todos los pares i y j con $1 \leq i < j \leq m$.

Regla de la Suma II

- Entonces, el número de formas de realizar la tarea es $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$.

Ejemplo 5

¿Cuál es el valor de k después de que se haya ejecutado el código de la Figura 2, donde $n_1, n_2, \ldots, n_m$ son números enteros positivos?

```
k := 0
for i_1 := 1 to n_1
    k := k + 1
for i_2 := 1 to n_2
    k := k + 1
        .
        .
        .
for i_m := 1 to n_m
    k := k + 1
```

Figura 2: Código para el Ejemplo 5.

Ejemplo 5 II

Solución:

- El valor inicial de k es cero.

Ejemplo 5 II

Solución:

- Este bloque de código se compone de m bucles diferentes.

Ejemplo 5 II

Solución:

- Cada vez que se atraviesa un bucle, se agrega 1 a k.

Ejemplo 5 II

Solución:

- Para determinar el valor de k después de que se haya ejecutado este código, necesitamos determinar cuántas veces atravesamos un bucle.

Ejemplo 5 II

Solución:

- Tenga en cuenta que hay n_i formas de atravesar el $i-$ésimo bucle.

Ejemplo 5 II

Solución:

- Debido a que sólo atravesamos un bucle a la vez, la regla de la suma muestra que el valor final de k, que es el número de formas de atravesar los m bucles, es $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$.

$\square$

Problemas de Conteo más Complejos I

- Muchos problemas de conteo no se pueden resolver usando solo la regla de la suma o solo la regla del producto.

Problemas de Conteo más Complejos I

- Sin embargo, muchos problemas de conteo complicados se pueden resolver usando estas dos reglas en combinación.

Problemas de Conteo más Complejos I

- Contemos el número de nombres de variables en el lenguaje de programación BASIC.

Ejemplo 6

En una versión del lenguaje de programación BASIC, el nombre de una variable es una cadena de uno o dos caracteres alfanuméricos, donde no se distinguen mayúsculas y minúsculas. (Un carácter alfanumérico es una de las 26 letras inglesas o uno de los 10 dígitos).

Además, el nombre de una variable debe comenzar con una letra y debe ser diferente de las cinco cadenas de dos caracteres que están reservadas para el uso de programación. ¿Cuántos nombres de variables diferentes hay en esta versión de BASIC?

Ejemplo 6 II

Solución:

- Sea V el número de diferentes nombres de variables en esta versión de BASIC.

Ejemplo 6 II

Solución:

- Sea V_1 el número de éstas que tienen un carácter de largo y V_2 el número de éstas que tienen dos caracteres de largo.

Ejemplo 6 II

Solución:

- Luego, por la regla de la suma, $V = V_1 + V_2$.

Ejemplo 6 II

Solución:

- Tenga en cuenta que $V_1 = 26$, porque un nombre de variable de un carácter debe ser una letra.

Ejemplo 6 II

Solución:

- Además, según la regla del producto, hay $26 \cdot 36$ cadenas de longitud dos que comienzan con una letra y terminan con un carácter alfanumérico.

Ejemplo 6 II

Solución:

- Sin embargo, cinco de estos están excluidos, por lo que $V_2 = 26 \cdot 36 - 5 = 931$.

Ejemplo 6 II

Solución:

- Por lo tanto, hay $V = V_1 + V_2 = 26 + 931 = 957$ nombres diferentes para las variables en esta versión de BASIC.

La Regla de la Resta I

- Suponga que una tarea se puede realizar de dos formas, pero algunas de las formas de hacerlo son comunes a ambas.

La Regla de la Resta I

- En esta situación, no podemos usar la regla de la suma para contar el número de formas de realizar la tarea.

- Si sumamos el número de formas de realizar las tareas de estas dos formas, obtenemos un recuento excesivo del número total de formas de hacerlo, porque las formas de realizar la tarea que son comunes a las dos formas se cuentan dos veces.

La Regla de la Resta I

- Para contar correctamente el número de formas de hacer las dos tareas, debemos restar el número de formas que se cuentan dos veces.

La Regla de la Resta I

- Esto nos lleva a una importante regla de conteo.

La Regla de la Resta II

LA REGLA DE LA RESTA Si una tarea se puede realizar de n_1 formas o de n_2 formas, entonces el número de formas de realizar la tarea es $n_1 + n_2$ menos el número de formas de realizar la tarea que es común a las dos formas diferentes.

La Regla de la Resta III

- La regla de la resta también se conoce como el principio de inclusión-exclusión, especialmente cuando se usa para contar el número de elementos en la unión de dos conjuntos.

La Regla de la Resta III

- Suponga que A_1 y A_2 son conjuntos.

La Regla de la Resta III

- Luego, hay $|A_1|$ formas de seleccionar un elemento de A_1 y $|A_2|$ formas de seleccionar un elemento de A_2.

La Regla de la Resta III

- Porque hay $|A_1 \cup A_2|$ formas de seleccionar un elemento en A_1 o en A_2, y $|A_1 \cap A_2|$ formas de seleccionar un elemento común a ambos conjuntos, tenemos

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

La Regla de la Resta III

- Ésta es la fórmula dada en la Sección 1.8 de las notas para el número de elementos en la unión de dos conjuntos.

Ejemplo 7 I

Ejemplo 7

¿Cuántas cadenas de bits de longitud ocho comienzan con 1 o terminan con 00?

Ejemplo 7

¿Cuántas cadenas de bits de longitud ocho comienzan con 1 o terminan con 00?

Solución:

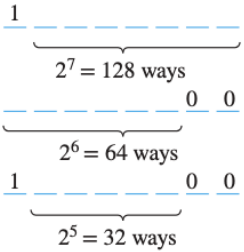

Figura 3: Cadenas de 8 bits que empiezan con 1 o terminan con 00.

Ejemplo 7 I

Ejemplo 7

¿Cuántas cadenas de bits de longitud ocho comienzan con 1 o terminan con 00?

Solución:

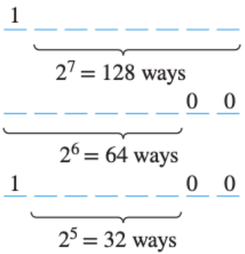

Figura 3: Cadenas de 8 bits que empiezan con 1 o terminan con 00.

$$128 + 64 - 32 = 160$$

La Regla de la División

LA REGLA DE LA DIVISIÓN Hay n/d formas de hacer una tarea si se puede hacer usando un procedimiento que se puede llevar a cabo de n formas, y para todas las formas w, exactamente d de las n formas corresponden a la forma w.

La Regla de la División

Observación 1

La regla de división resulta útil cuando parece que una tarea se puede realizar de n formas diferentes, pero resulta que para cada forma de realizar la tarea, existen d formas equivalentes de realizarla. En estas circunstancias, podemos concluir que existen n/d formas desiguales de realizar la tarea.

Ejemplo 8

Ejemplo 8

Suponga que se ha desarrollado un sistema automatizado que cuenta las patas de las vacas en un pastizal. Suponga que este sistema ha determinado que en el pastizal de un agricultor hay exactamente 572 patas. ¿Cuántas vacas hay en este pasto, asumiendo que cada vaca tiene cuatro patas y que no hay otros animales presentes?

Ejemplo 8

Suponga que se ha desarrollado un sistema automatizado que cuenta las patas de las vacas en un pastizal. Suponga que este sistema ha determinado que en el pastizal de un agricultor hay exactamente 572 patas. ¿Cuántas vacas hay en este pasto, asumiendo que cada vaca tiene cuatro patas y que no hay otros animales presentes?

Solución:

- Sea n el número de patas de vaca contadas en un pastizal.

Ejemplo 8

Suponga que se ha desarrollado un sistema automatizado que cuenta las patas de las vacas en un pastizal. Suponga que este sistema ha determinado que en el pastizal de un agricultor hay exactamente 572 patas. ¿Cuántas vacas hay en este pasto, asumiendo que cada vaca tiene cuatro patas y que no hay otros animales presentes?

Solución:

- Sea n el número de patas de vaca contadas en un pastizal.
- Debido a que cada vaca tiene cuatro patas, según la regla de división sabemos que el pastizal contiene $n/4$ vacas.

Ejemplo 8

Suponga que se ha desarrollado un sistema automatizado que cuenta las patas de las vacas en un pastizal. Suponga que este sistema ha determinado que en el pastizal de un agricultor hay exactamente 572 patas. ¿Cuántas vacas hay en este pasto, asumiendo que cada vaca tiene cuatro patas y que no hay otros animales presentes?

Solución:

- Sea n el número de patas de vaca contadas en un pastizal.
- Debido a que cada vaca tiene cuatro patas, según la regla de división sabemos que el pastizal contiene $n/4$ vacas.
- En consecuencia, el pastizal con 572 patas de vaca tiene $572/4 = 143$ vacas en él.

$\square$

Diagramas de Árbol

- Los problemas de conteo se pueden resolver usando diagramas de árbol.

Diagramas de Árbol

- Un árbol consta de una raíz, varias ramas que salen de la raíz y posibles ramas adicionales que salen de los extremos de otras ramas.

Diagramas de Árbol

- Para usar árboles en el conteo, usamos una rama para representar cada opción posible.

Diagramas de Árbol

- Representamos los posibles resultados por las hojas, que son los puntos finales de las ramas que no tienen otras ramas comenzando en ellas.

Diagramas de Árbol

- Tenga en cuenta que cuando se usa un diagrama de árbol para resolver un problema de conteo, el número de opciones de qué rama seguir para llegar a una hoja puede variar.

Ejemplo 9

¿Cuántas cadenas de bits de longitud cuatro no tienen dos unos consecutivos?

Ejemplo 9

¿Cuántas cadenas de bits de longitud cuatro no tienen dos unos consecutivos?

Solución:

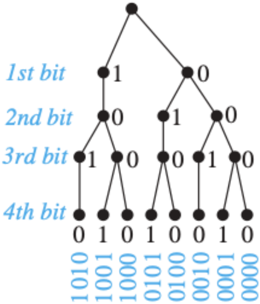

Figura 4: Cadenas de longitud cuatro sin dos unos consecutivos.

Ejercicios I

1. Una marca particular de camisa viene en 12 colores, tiene una versión masculina y una femenina, y viene en tres tallas para cada sexo. ¿Cuántos tipos diferentes de esta camisa se fabrican?
2. Seis aerolíneas diferentes vuelan desde Nueva York a Denver y siete vuelan desde Denver a San Francisco. ¿Cuántos pares diferentes de aerolíneas puede elegir para reservar un viaje de Nueva York a San Francisco vía Denver, cuando elige una aerolínea para el vuelo a Denver y una aerolínea para el vuelo de continuación a San Francisco?
3. Hay cuatro rutas de automóviles principales de Boston a Detroit y seis de Detroit a Los Ángeles. ¿Cuántas rutas de automóviles importantes hay de Boston a Los Ángeles a través de Detroit?
4. ¿Cuántas iniciales de tres letras diferentes pueden tener las personas?
5. ¿Cuántas iniciales de tres letras diferentes sin ninguna de las letras repetidas puede tener la gente?

Ejercicios II

6. ¿Cuántas iniciales de tres letras diferentes hay que comienzan con una A?
7. ¿Cuántas cadenas de bits de longitud ocho hay?
8. ¿Cuántas cadenas de bits de longitud diez comienzan y terminan con un 1?
9. En una gran universidad, 434 estudiantes de primer año, 883 estudiantes de segundo año y 43 estudiantes de tercer año están inscritos en un curso de introducción a los algoritmos. ¿Cuántas secciones de este curso deben programarse para acomodar a todos estos estudiantes si cada sección contiene 34 estudiantes?
10. ¿Cuántas cadenas de bits de longitud siete comienzan con dos ceros o terminan con tres unos?
11. Determine el número de partidos jugados en un torneo de eliminación simple con n jugadores, donde para cada juego entre dos jugadores el ganador continúa, pero el perdedor es eliminado.